

Correction Devoir maison n°8

Exercice I - Obligatoire pour les groupes 9 à 11

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. On détermine le script scilab

```
n = input("Entrez un nombre entier n")
u = 0
for k = 1:n
    u = sqrt(u+2)
end
disp(n)
```

2. On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ existe et } 0 \leq u_n \leq 2\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc $u_n \geq 0$ et donc $\sqrt{u_n + 2}$ est bien définie. De plus

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n \leq 2 \\ \implies & 0 \leq u_n + 2 \leq 4 \\ \implies & 0 \leq \sqrt{u_n + 2} \leq 2 \\ \implies & 0 \leq u_{n+1} \leq 2 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 2$.

3. On montre par récurrence les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_{n+1} \geq u_n\}$.

— **Initialisation** : $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_0 = 0$. On a alors $u_1 \geq u_0$ et donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \geq u_n \\ \implies & u_{n+1} + 2 \geq u_n + 2 \\ \implies & \sqrt{u_{n+1} + 2} \geq \sqrt{u_n + 2} \\ \implies & u_{n+2} \geq u_{n+1} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

Elle est donc convergente.

On détermine la limite de la suite à l'aide du théorème du point fixe. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et on résout

$$\begin{aligned} \ell = \sqrt{\ell + 2} &\iff \ell^2 = \ell + 2 \\ &\iff \ell^2 - \ell - 2 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$ Il y a alors deux solutions

$$\ell_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \ell_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Or tous les termes de la suite sont compris entre 0 et 2 donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

5. On donne le script Scilab :

```
n = 0
u = 0
while abs(u - 2) > 10^(-6) do
    u = sqrt(u+2)
    n = n+1
end
disp(n)
```

Exercice II - Obligatoire pour les groupes 1 à 8

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Script Scilab

```
n = input("Entrez un entier n")
u = 1
for k = 1:n
    u = log(1 + u^2)
end
disp(u)
```

2. On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{0 \leq u_n \leq 1\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = 1$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} &0 \leq u_n \leq 1 \\ \implies &0 \leq u_n^2 \leq 1 \\ \implies &1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2 \\ \implies &0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2) \leq 1 \\ \implies &0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1+x^2) - x$.

(a) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ en tant que composée et somme de fonction dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2 + 2x - 1}{1+x^2} = \frac{-(1-x)^2}{1+x^2} \leq 0$$

La fonction f est décroissante. $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2) - 1$.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	-	
Variations de f	0 ↘ $\ln(2) - 1$	

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \leq 0}$$

(b) On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. On a donc

$$f(u_n) \leq 0 \iff u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Elle est donc convergente.

4. (a) On pose la fonction $g : x \rightarrow \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$$

La fonction g est donc décroissante et $g(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \leq 0$, c'est à dire

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x}$$

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 > 0$ et donc, d'après la question précédente

$$\boxed{u_{n+1} = \ln(1+u_n^2) \leq u_n^2}$$

(c) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{u_n \leq (\ln 2)^n\}$.

— **Initialisation :** $u_0 \leq 1$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n^2 \\ \implies u_{n+1} &\leq (\ln 2)^n \times (\ln 2)^n \\ \implies u_{n+1} &\leq (\ln 2)^{n+1} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $(\ln 2)^n \leq \ln(2)$ pour $n \geq 1$. La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq (\ln 2)^n.}$

(d) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$. Comme $\ln 2 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

(e) Programme Scilab

$\boxed{6 \text{ est le plus petit entier } n \text{ tel que } |u_n| < 10^{-4}.}$

(f) Soit $n \geq 2$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} u_k &\leq (\ln 2)^k \\ \implies \sum_{k=0}^{n-1} u_k &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (\ln 2)^k \\ \implies \sum_{k=0}^{n-1} u_k &\leq \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2} \end{aligned}$$

Exercice III - Obligatoire pour les groupes 6 à 11

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et pour tout entier } n, u_{n+1} = u_n(2 - u_n),$$

où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

1. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} (polynôme) et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 - 2x$$

On a $2 - 2x > 0 \iff 1 > x$. Sachant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$
Variations de f				

2. (a) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{0 < u_n < 1\}$.

— **Initialisation** : $u_0 = a \in]0, 1[$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} 0 &< u_n < 1 \\ \implies f(0) &< f(u_n) < f(1) \quad (\text{La fonction } f \text{ est croissante sur } [0, 1].) \\ \implies 0 &< u_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1.}$

(b) On sait que pour tout entier n , $u_n > 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - u_n > 1$$

car $u_n < 1$.

$\boxed{\text{La suite } u_n \text{ est donc croissante .}}$

(c) La suite est croissante et majorée par 1. $\boxed{\text{Elle est donc convergente}}$ et tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On a nécessairement

$$f(\ell) = \ell \iff 2\ell - \ell^2 = \ell \iff \ell^2 - \ell = 0$$

Les solutions possibles sont 0 et 1. Or, la suite (u_n) est croissante donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

3. On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = 1 - u_n$$

(a) Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - u_{n+1} \\ &= 1 - (2u_n - u_n^2) \\ &= 1 - 2u_n + u_n^2 \\ &= (1 - u_n)^2 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n^2.}$

(b) On montre les propriétés suivantes $\mathcal{P}_n : \{v_n = (1 - a)^{2^n}\}$.

— **Initialisation** : $v_0 = 1 - a$ et $(1 - a)^{2^0} = 1 - a$ donc la propriété \mathcal{P}_0 est vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . On a donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n^2 \\ &= \left((1 - a)^{2^n}\right)^2 \\ &= (1 - a)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = (1 - a)^{2^n}.}$

(c) On a $1 - a \in]0, 1[$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} (1 - a)^X = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.}$$

Et comme $u_n = 1 - v_n$, on retrouve

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.}$$

4. On considère le temps de vie d'une machine à café. En sortant de l'usine (au temps $t = 0$), la machine à café a une probabilité a d'être cassé ($0 < a < 1$). On notera A_n l'événement "la machine est cassé au temps $t = n$ " et $p_n = p(A_n)$. Si la machine est cassé au temps $t = n$ elle reste cassé au temps $t = n + 1$. Si la machine est en état de marche au temps $t = n$, elle a la probabilité p_n d'être cassé au temps $t = n + 1$.

- (a) Les événements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_1 &= p(A_1) = p(A_0)p_{A_0}(A_1) + P(\overline{A_0})P_{\overline{A_0}}(A_1) \\ &= a \times 1 + (1 - a)p_0 \\ &= a + (1 - a)a \\ &= 2a - a^2 \end{aligned}$$

On conclut que $p_1 = a(2 - a)$.

- (b) Les événements A_0 et $\overline{A_0}$ forment un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(A_{n+1}) = p(A_n)p_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= p_n \times 1 + (1 - p_n)p_n \\ &= p_n(2 - p_n) \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n(2 - p_n)$.

- (c) La suite (p_n) est la même que la suite u_n de la première partie. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1.$$

Cela signifie que sur le long terme, la machine à café finira par être cassé (ce qui est logique finalement).

Exercice IV - Obligatoire pour le groupe 1 à 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$, la fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R} (car c'est une fonction polynomiale). On calcule pour tout x réel

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

Or pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq x^{n-1} \leq 1$ et donc $f'_n(x) > 0$.

La fonction f_n est strictement décroissante sur $[0; 1]$.

2. On a $f_n(0) = 1 > 0$ et $f_n(1) = 2 - n < 0$ et donc :

- La fonction f_n est continue sur \mathbb{R} (c'est une fonction polynômiale)
- La fonction f_n est strictement décroissante sur $[0; 1]$.
- $f_n(0) > 0$ et $f_n(1) < 0$.

Donc, d'après le théorème de la bijection,

l'équation $x^n + 1 - nx = 0$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ notée x_n .

3. On calcule d'une part

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n + 1 - n \times \frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n + 1 - 2 = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 < 0$$

En effet comme $n \geq 3$, alors $\frac{2}{n} \leq 1$ et donc $\left(\frac{2}{n}\right)^n < 1$. D'autre part,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n + 1 - n \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n > 0$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right)}$$

La fonction f_n étant bijective sur $[0, 1]$, elle admet une fonction réciproque strictement décroissante. Ainsi,

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{2}{n}\right) < f_n(x_n) < f_n\left(\frac{1}{n}\right) &\iff f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{2}{n}\right)\right) > f_n^{-1}\left(f_n(x_n)\right) > f_n^{-1}\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\iff \boxed{\frac{1}{n} < x_n < \frac{2}{n}} \end{aligned}$$

On sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème des gendarmes (cf cours sur les suites), on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0}$$

4. Par définition, $f_n(x_n) = 0$ et donc

$$(x_n)^n + 1 - nx_n = 0 \iff nx_n = (x_n)^n + 1$$

Or $x_n \in [0; 1]$ et $x_n \neq 1$ donc $x_n \in [0, 1[$. On a alors (cf cours sur les suites)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n)^n = 0$$

Et ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = 1.}$$

5. On étudie le signe de

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} + 1 - (n+1)x - x^n - 1 + nx \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x(x^n - x^{n-1} - 1) \\ &= x(x^{n-1}(x-1) - 1) \end{aligned}$$

Or pour $x \in [0, 1]$ on a $x > 0$, $x^{n-1} > 0$ et $x - 1 \leq 0$. Donc $x^{n-1}(x - 1) \leq 0$ et par conséquent $(x^{n-1}(x - 1) - 1) < 0$. donc pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \geq 3$,

$$\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0}$$

On a notamment

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_{n+1}) - f_n(x_{n+1}) \leq 0 &\iff f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1}) \\ &\iff 0 \leq f_n(x_{n+1}) \\ &\iff f_n(x_n) \leq f_n(x_{n+1}) \end{aligned}$$

En effet, on utilise la définition de x_n . La fonction f_n étant de plus bijective sur $[0; 1]$ et sa réciproque étant strictement décroissante, on obtient :

$$f_n(x_n) \leq f_n(x_{n+1}) \iff x_n \geq x_{n+1}$$

La suite $(x_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

Exercice V - Obligatoire pour le groupe 1

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ où pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$

sont adjacentes. On admet que ces deux suites convergent vers e . Comment obtenir une approximation de e à 10^{-3} près à l'aide de Scilab ?

On montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. C'est en effet une somme de terme positifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

On vérifie alors que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{nn!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{n+1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{n^2+n-1}{(n+1)(n+1)!} \end{aligned}$$

Or $n \geq 1$ donc $n^2 + n - 1 \geq 0$ et

$$v_{n+1} - v_n \leq 0$$

La suite (v_n) est décroissante. Finalement,

$$v_n - u_n = \frac{1}{nn!}$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nn!} = 0$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

Programme Scilab :

```
u = 0
k = 0
while abs(u - exp(1)) <= 10^(-3) do
    u = u + 1/(factorial(k))
    k = k + 1
end
disp(u)
```